

一类非线性奇异积分方程的可解性*

赵善基¹⁾ 曾文曲²⁾

1) 江门教育学院数学系, 江门, 529000

2) 广东工业大学研究生处, 广州, 510090

摘要 形如 $u(x) = \int_a^b \frac{f[x, s, u(s)]}{s-x} ds$ 的非线性奇异积分方程当 K_1, K_2 充分大时或者 $\omega_1, \omega_2, \omega$ 满足一定条件时, 在函数类 $H_{k_1 k_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中有解. 本文证明这一结论对更一般形式的非线性奇异积分方程也是成立的.

关键词 非线性; 奇异积分方程; Holder 函数类

中图分类号 O175.5

1 主要结果

文献[1]研究了方程

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{F[x, s, u(s)]}{s-x} ds \quad (1)$$

和方程

$$B \quad bu(x) = \lambda \cdot F\left[x, \int_a^b \frac{f[x, s, u(s)]}{s-x} ds + g(x)\right] \quad (2)$$

在 $|\lambda|$ 充分小时的可解性.

本文讨论了如下形式的方程

$$u(x) = \int_a^b \frac{F[x, s, u(x)]}{s-x} ds \quad (3)$$

和方程

$$u(x) \Rightarrow F\left[x, \int_a^b \frac{f[x, s, u(s)]}{s-x} ds\right], \quad (4)$$

结论是, 对于方程(3)有:

定理1 若函数 $F(x, s, u)$, $a < s, x < b$, $-\infty < u < +\infty$, 满足条件

$$1^\circ \int_a^b \frac{F(x, s, 0)}{s-x} ds \in H_{k_0, k'_0}(\omega_1, \omega_2, \omega); \quad (5)$$

$$2^\circ \quad |F(x_1, s_1, u_1) - F(x_2, s_2, u_2)| \leq$$

$$B \left[\frac{\omega(|s_1 - s_2|)}{W(s_1, s_2)} + \frac{\omega^*(|x_1 - x_2|)}{W(s_1, s_2)} + |u_1 - u_2| \right], \quad (6)$$

则存在 $R_1, R_2 > 0$, 方程(3) 在空间 $H_{R_1, R_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中可解.

对于方程(4), 有:

定理 2 若函数 $F(x, t)$, $a \leq x \leq b$, $-\infty < t < +\infty$, 满足条件:

$$|F(x_1, t_1) - F(x_2, t_2)| \leq A_1(\omega(|x_1 - x_2|) + |t_1 - t_2|), \quad (7)$$

函数 $f(x, s, u)$, $a < x, s < b$, $-\infty < u < +\infty$, 满足条件:

$$|f(x_1, s_1, u_1) - f(x_2, s_2, u_2)| \leq A_2[\omega(|s_1 - s_2|) + \omega^*(|x_1 - x_2|) + |u_1 - u_2|], \quad (8)$$

则存在 $R_1, R_2 > 0$, 使方程(4) 在 $H_{R_1, R_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中有解.

其中

$$W(s_1, s_2) = \begin{cases} \omega_1(s_1 - a) \omega(s_1 - a) \omega_2(b - s_2) \omega(b - s_2) & s_1 \leq s_2 \\ \omega_1(s_2 - a) \omega(s_2 - a) \omega_2(b - s_1) \omega(b - s_1) & s_1 > s_2, \end{cases}$$

$$\bar{W}(s_1, s_2) = \begin{cases} \omega_1(s_1 - a) \omega(s_1 - a) \omega_2(b - s_2) \omega(b - s_2) & s_1 \leq s_2 \\ \omega_1(s_2 - a) \omega(s_2 - a) \omega_2(b - s_1) \omega(b - s_1) & s_1 > s_2, \end{cases}$$

而函数 $\omega_1(\sigma)$, $\omega_2(\sigma)$, $\omega(\sigma)$, $\omega^*(\sigma) \in \Phi^{[1]}$, 且

$$\sup_{0 < \sigma \leq b-a} \frac{\omega(\sigma)}{\omega(\sigma)} = l_0 < \infty, \quad (9)$$

$$\int_0^\sigma \frac{dt}{\omega_1(t) \omega(t)} \leq l_i \frac{\sigma}{\omega(\sigma) \omega(\sigma)}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

同时 $\frac{\sigma}{\omega_1(\sigma) \omega(\sigma)}$ 是几乎增的^[1],

$$\omega^*(\sigma) \ln \frac{b-a}{\sigma} \leq d \omega(\sigma). \quad (11)$$

集 $H_{R_1 R_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 定义为, 若 $u(x) \in H_{R_1 R_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$, 则

$$\sup_{a < x_1 < x_2 < b} \{ |u(x_1) - u(x_2)| \frac{W(x_1, x_2)}{\omega(|x_1 - x_2|)} \} \leq R_2, \quad (12)$$

$$\sup_{a < x \leq b} \{ |u(x)| \omega_1(x - a) \omega_2(b - x) \} \leq R_1. \quad (13)$$

2 定理 1 的证明

先简述文献[1] 中的有关内容

定理 3^[1] 若 $F(x, s, u)$ 满足定理 1 的条件, 则当

$$|\lambda| \leq \min \left\{ \frac{K_1}{K_1}, \frac{K_2}{K_2} \right\} = \lambda_0 \quad (14)$$

时, 方程(1) 在 $H_{K_1, K_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中可解, 这里

$$K_1 = (K_0 + 2l_2 B) + l_1 B K_1 + l_2 B K_2,$$

$$K_2 = (K'_0 + 2l_4 B + 2l_5 B) + l_3 B K_1 + l_4 B K_2.$$

记

$$f(x, s) = F(x, s, u(s)) - F(x, s, 0),$$

文献[1] 中证明了, 若

$$|f(x, s)| \leq \frac{A}{\omega_1(s-a)\omega_2(b-s)},$$

$$|f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2)| \leq B_1 \frac{\omega(|s_1 - s_2|)}{W(s_1, s_2)} + B_2 \frac{\omega^*(|x_1 - x_2|)}{W(s_1, s_2)},$$

则 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 为使下式成立的与 A, B_1, B_2 及函数 f 无关的常数

$$|V(x)| \leq \frac{l_1 A + l_2 B_1}{\omega_1(x-a)\omega_2(b-x)}, \quad (15)$$

$$|V(x_1) - V(x_2)| \leq (l_3 A + l_4 B_1 + l_5 B_2) \frac{\omega(|x_1 - x_2|)}{W(x_1, x_2)}, \quad (16)$$

其中

$$V(x) = \int_a^b \frac{f(x, s)}{s-x} ds. \quad (17)$$

下面给出定理 1 的证明:

记 $\omega_i^*(\sigma) = \frac{1}{K} \omega_i(\sigma)$, $i = 1, 2$, K 是待定的大于 1 的数. 我们在以 $\omega_1^*(\sigma), \omega_2^*(\sigma), \omega(\sigma)$ 为特征的空间中用定理 3 讨论方程 (3) 的可解性.

ω_i^* 代 ω_i 后, 条件式 (9) ~ (11) 仍显然成立, 式 (5) 中的 K_0 和 K'_0 用 K_0^* 和 K'^*_0 代替, 且有 $K_0^* = \frac{1}{K^2} K_0$, $K'^*_0 = \frac{1}{K^2} K'_0$. 式 (6) 中的 W 和 W^* 用 W^* 和 W^* 代替, 由于 $K > 1$, 有 $W^* = \frac{1}{K^2} W < W$ 和 $W^* = \frac{1}{K^2} W < W$. 由定理 3 可知对于任意给定的 K_1, K_2 , 若

$$\lambda_0^* = \min \left\{ \frac{K_1}{K_1^*}, \frac{K_2}{K_2^*} \right\} \geq 1, \quad (18)$$

方程 (3) 可解 (在 $H_{K_1, K_2}(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega)$ 中). 其中

$$K_1^* = (K_0^* + 2l_2^* B) + l_1^* B K_1 + l_2^* B K_2,$$

$$K_2^* = (K'^*_0 + 2l_4^* B + 2l_5^* B) + l_3^* B K_1 + l_4^* B K_2,$$

这里, l_i^* , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 也将由类似式 (15)、(16) 所确定. 由式 (15)、(16) 知:

$$|V(x)| \leq \frac{l_1 A + l_2 B_1}{\omega_1(x-a)\omega_2(b-x)} = \frac{\frac{1}{K^2} l_1 A + \frac{1}{K^2} l_2 B_1}{\omega_1^*(x-a)\omega_2^*(b-x)}$$

$$|V(x_1) - V(x_2)| \leq \left[\frac{1}{K^2} l_3 A + \frac{1}{K^2} l_4 B_1 + \frac{1}{K^2} l_5 B_2 \right] \frac{\omega(|x_1 - x_2|)}{W^*(x_1, x_2)}$$

所以 $l_i^* = \frac{1}{K^2} l_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 因此当 K 充分大时, 式 (18) 必然成立. 设 $u(x) \in H_{K_1, K_2}(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega)$ 是方程 (3) 的一个解, 则

$$|u(x)| \omega_1^*(x-a)\omega_2^*(b-x) = \frac{1}{K^2} |u(x)| \omega_1(x-a)\omega_2(b-x) \leq K_1$$

即

$$|u(x)| \omega_1(x-a)\omega_2(b-x) \leq K^2 K_1 \quad (19)$$

同时

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W^*(x_1, x_2) = \frac{1}{K^2} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq K_2$$

$$\text{即} \quad \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq K^2 K_2, \quad (20)$$

由式(19)、(20) 可知 $u(x) \in H_{K^2 K_1, K^2 K_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$. 取定理 1 中的 $R_1 = K^2 K_1, R_2 = K^2 K_2$ 即可. 证毕.

其实, 方程(3) 对于下面条件的 R_1, R_2 :

$$R_1 > K_0 + 2l_2 B; \quad R_2 > K_0' + 2l_4 B + 2l_5 B,$$

在空间 $H_{R_1, R_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中有解. 这一点从定理 1 的证明过程不难推出.

3 定理 2 的证明

$$\text{令} \quad \omega(x) = \int_a^b \frac{f(x, s, u(s))}{s - x} ds, \quad (21)$$

将式(4) 代入式(21) 得到

$$\omega(x) = \int_a^b \frac{f(x, s, F(s, \omega(s)))}{s - x} ds, \quad (22)$$

式(22) 是关于函数 $\omega(x)$ 的积分方程, 式(4) 与式(22) 在如下意义下等价:

若 $u(x)$ 是式(4) 的解, 则由式(21) 所确定的函数是式(22) 的解; 若 $\omega(x)$ 是式(22) 的解, 则函数 $u(x) = F(x, \omega(x))$ 是式(4) 的解.

下面用定理 1 证明式(22) 的可解性.

$$\text{记} \quad G(x, s, \omega) = f(x, s, F(s, \omega))$$

$$I(x) = \int_a^b \frac{G(x, s, 0)}{s - x} ds$$

$$\text{因为} \quad |I(x)| = \left| \int_a^b \frac{G(x, s, 0) - G(x, x, 0)}{s - x} ds + \int_a^b \frac{G(x, x, 0)}{s - x} ds \right| \leq \\ A_2(A_1 + 1) \int_a^b \frac{\omega(|x - s|)}{|s - x|} ds + |G(x, x, 0) \ln \frac{b - x}{x - a}|$$

故存在 $K_0 > 0$, 使得

$$\sup_{a < x < b} |I(x)| \leq \omega_1(x - a) \omega_2(b - x) \leq K_0, \quad (23)$$

下面验证, 存在 K_0' , 使得

$$\sup_{a < x_1, x_2 < b} \frac{|I(x_1) - I(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq K_0'. \quad (24)$$

$$\text{先考虑} \quad a < x_1 \leq x_2 \leq a + \frac{3}{4}(b - a).$$

$$\text{记} \quad Q_1(x) = \int_a^b \frac{G(x, s, 0)}{s - x} ds,$$

$$\text{则} \quad |I(x_1) - I(x_2)| \leq |Q_1(x_1) - Q_1(x_2)| + |Q_1(x_2) - I(x_2)|.$$

这时, 不难证明存在 $\overline{K}_0'$, 使

$$\frac{|Q_1(x_1) - Q_1(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq \overline{K}_0' \quad (25)$$

$$\text{而} \quad Q_1(x_2) - I(x_2) = \int_a^b \frac{G(x_1, s, 0) - G(x_2, s, 0)}{s - x_2} ds = L_1 + L_2 + L_3. \quad (26)$$

其中 L_1, L_2, L_3 分别是展布在区间 $[a, x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2}]$ 、 $[x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2}, x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}]$ 、

$[x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}, b]$ 上的积分. 若 $x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2} \geq b$ 时, L_2 的积分上限为 b , $L_3 = 0$. 由条件(8) 容易得到

$$|L_1| \leq A_2 \omega^* (|x_1 - x_2|) \left| \ln \frac{x_2 - a}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \right| \quad (27)$$

和

$$|L_3| \leq A_2 \omega^* (|x_1 - x_2|) \left| \ln \frac{x_2 - a}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \right| \quad (28)$$

$$\text{而 } |L_2| \leq \int_{x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2}}^{x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}} \frac{[G(x_2, s, 0) - G(x_2, x_2, 0)] - [G(x_1, s, 0) - G(x_1, x_2, 0)]}{s - x_2} ds +$$

$$| [G(x_2, x_2, 0) - G(x_1, x_2, 0)] \int_{x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2}}^{x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}} \frac{ds}{s - x_2} | \leq$$

$$2A_2(A_1 + 1) \int_{x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2}}^{x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}} \frac{\omega(|s - x_2|)}{|s - x_2|} ds \quad (29)$$

由于 $\omega \in \Phi^I$, 所以存在 $A_\omega > 0$, $\int_0^\sigma \frac{\omega(t)}{t} dt \leq A_\omega \omega(\sigma)$, 于是由式(29) 得到:

$$|L_2| \leq 4A_2(A_1 + 1)A_\omega \omega\left(\frac{|x_2 - x_1|}{2}\right), \quad (30)$$

这样根据关系式(11) 不难得到存在 $\overline{K}_0' > 0$, 使

$$\frac{|L_i|}{\omega(|x_1 - x_2|)} \omega(x_1, x_2) \leq \overline{K}_0', \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (31)$$

由式(25)、(31) 可知, 存在 $K_0' > 0$, 使

$$\frac{|I(x_1) - I(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq K_0', \quad a < x_1 \leq x_2 \leq a + \frac{3}{4}(b - a). \quad (32)$$

当 $a + \frac{1}{4}(b - a) \leq x_1 \leq x_2 < b$ 时, 类似地可得到:

$$\frac{|I(x_1) - I(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq K_0'$$

当 $a < x_1 \leq a + \frac{1}{4}(b - a)$, $a + \frac{3}{4}(b - a) \leq x_2 < b$ 时,

$$\frac{|I(x_1) - I(x_2)|}{\omega(|x_1 - x_2|)} W(x_1, x_2) \leq \frac{|I(x_1)| + |I(x_2)|}{\omega(\frac{b-a}{2})} W(x_1, x_2) \leq K_0'.$$

可见式(24) 成立, 故 $I(x) \in H_{K_0, K, 0}(\omega_1, \omega_2, \omega)$, 即函数 $G(x, s, \omega)$ 满足定理 1 的条件(5).

$G(x, s, \omega)$ 满足条件(6) 是不难验证的, 所以由定理 1 得到, 存在 $\overline{R}_1, \overline{R}_2 > 0$, 方程(22) 在 $H_{\overline{R}_1, \overline{R}_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$ 中有解. 这时, $u(x) = F(x, \omega(x))$ 是方程(4) 的解. 由于:

$$|u(x)| \leq |F(x, \omega(x)) - F(a, 0)| + |F(a, 0)| \leq$$

$$A_1[\omega(x - a) + |\omega(x)|] + |F(a, 0)|, \quad (33)$$

On Solvability of a Certain Class Non-Linear Singular Integral Equation

Zhao Shanji¹⁾ Zeng Wenqu²⁾

1) Dept of Maths. Jiang Men Education Emstitute, 520900

2) Postgraduate Education office GDUT, 510090

Abstract When R_1, R_2 is amply big or $\omega_1, \omega_2, \omega$ is in conformity with certain conditions, the following nonlinear singular integral equation

$$u(x) = \int_a^b \frac{f[x, s, u(x)]}{s-x} ds$$

has at least one solution in functional class $H_{K_1, K_2}(\omega_1, \omega_2, \omega)$. It is right to general non-linear singulay integral equation, too.

Key words non-linear; singular integral equation; Holder functional class

(责任编辑: 利 民)

(上接第 65 页)

参 考 文 献

- 1 John Wiley, Sons. Inc. J of Applied Polymer Sciences. 1983, 28: 1909~ 1917
- 2 A C M Wu, W A Bough. in Proceedings of the First International Conference of Chitin/Chitosan, R. A. A. Muzarelli and E. R. Pariser, Eds. MIT, Cambridge, Mass., 1978, 88
- 3 汪志君. 碱量法测定壳聚糖中的胺基. 化学世界, 1986, (1): 22~ 23
- 4 陈振宁, 郭慎满. 碱量法测定壳聚糖中胺基方法的改进. 化学通报, 1990, (10): 42~ 43
- 5 张秋华, 骆赞椿, 徐敏. 水溶性甲壳素衍生物溶液粘度的研究. 化学世界, 1997, (1): 35~ 38
- 6 杜兰平, 徐崇泉, 郭慎满等. 壳聚糖的溶解性及其溶液粘度的研究. 化学与粘合, 1989, (4): 213~ 216
- 7 梁亮, 梁逸曹. 微波辐射技术在有机合成中的应用. 化学通报, 1996, (3): 26~ 32

Study on Preparation of Chitosan with Microwave New Technology

Liang Liang Cui Yingde Luo Zongming

Dept. of Chemical Engineering. GDUT, Guangzhou 510090

Abstract Using microwave radiation technology, the chitosan is prepared by chitin deacetylation in about 50% sodium hydroxide solution. The experiments show that the deacetylation is 77% once in fifteen minutes. It almost reaches 100% deacetylation by three times and over.

Key words chitin; chitosan, microwave; radiation

(责任编辑: 杨耀辉)